2. zadaća

1. Neka je $V/\mathbb{Q}$ k.d. vektorski prostor i neka su $M, N \subset V$ potpune ($\mathbb{Z}$-)rešetke. Dokažite da su $M+N$ i $M \cap N$ su potpune rešetke.

2. Neka je $B/\mathbb{Q}$ kvat. alg. i neka je $L \subset B$ potpuna $\mathbb{Z}$-rešetka. Dokažite da je $L \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$.

3. Neka je V/F k. dim. v. prostor nad poljem alg. brojeva F i neka je R prsten cijelih od F. Neka je $Q : V \to F$ kvadratna forma i neka je $M \subset V$ potpuna R-rešetka. Neka je $L \subset F$ R-podmodul od F generiran s vrijednostima od Q, tj. sa skupom $\{Q(m) : m \in M\}$. Dokažite da je L razlomljeni R-ideal.

4. Neka je F polje alg. brojeva i R prsten cijelih.

Neka je $\mathfrak{a} \leq R$ ideal. Dokažite da je

$$\begin{pmatrix} R & R \\ \mathfrak{a} & R \end{pmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R) : c \in \mathfrak{a} \right\} \text{ (R-)red u } M_2(F).$$

5. Neka je $\mathcal{O} \subset H_{/\mathbb{Q}}$ ($\mathbb{Z}$-) red u kvat. algebri H nad $\mathbb{Q}$.

Dokažite da je svaki element $\alpha \in \mathcal{O}$ cijeli nad $\mathbb{Z}$.

prsten cijelih u F polje brojeva ili lokalno polje

6. Neka su $I, J \subseteq H$ $\mathcal{O}_F$-rešetke u kv. algebri H nad poljem F.

potpune

Definirajmo s $I \cdot J$ $\mathcal{O}_F$-podmodul od H generiran s produktima $\alpha\beta$ gdje je $\alpha \in I$ i $\beta \in J$, tj.

$$IJ = \left\{ \sum \alpha_i \beta_i : \alpha_i \in I, \beta_i \in J \right\}$$

a) Pokažite da je IJ $(\mathcal{O}_F)$ rešetka.

b) Neka je $\mathfrak{p} < \mathcal{O}_F$ prost ideal. Pokažite da produkt komutira s lokalizacijom, tj. da

produkt $\mathcal{O}_{F}(\mathfrak{p})$-rešetki

$$\mathcal{O}_F(\mathfrak{p})(IJ) = (\mathcal{O}_F(\mathfrak{p}) I)(\mathcal{O}_F(\mathfrak{p}) \cdot J)$$

polje alg. broja ili p-adsko polje

7. Neka je $\mathcal{O} \subseteq H$ ($\mathcal{O}_F$-) red u kv. alg. H/F.

a) Pokažite da je $\mathcal{O}_\ell(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_r(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$

lijevi i desni red pridružen idealu

b) Neka je $\alpha \in H^\times$ i $\alpha\mathcal{O} = \{\alpha\beta : \beta \in \mathcal{O}\}$. Pokažite da je $\alpha\mathcal{O}$ potpuna $\mathcal{O}_F$-rešetka i $\mathcal{O}_\ell(\alpha\mathcal{O}) = \alpha\mathcal{O}\alpha^{-1}$.

8. Neka je B/F kv. algebra. Za $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in B$ označimo s

$$d(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \det\left(\mathrm{trd}(\alpha_i \alpha_j)\right)_{i,j=1,\dots,4}$$

reducirani trag.

Neka su $\alpha_i, \beta_i \in B$ za $i=1,\dots,4$ takvi da je $\beta_i = \sum m_{ij}\alpha_j$ gdje su $m_{ij} \in F$.

Neka je $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,4}$. Dokažite

$$d(\beta_1, \dots, \beta_4) = \det(M)^2 \, d(\alpha_1, \dots, \alpha_4).$$

9. Je li red G' iz primjera 6 maksimalan? Zašto?

10. Neka su $L_0, L \subset H/F$ potpune G_F-rešetke za koje vrijedi:

$$aL_0 \subseteq L \subseteq a^{-1} L_0 \qquad \text{za neki } a \in G_F$$

Dokažite:

$$a^2 \operatorname{End}(L_0) \subseteq \operatorname{End}(L) \subseteq a^{-2} \operatorname{End}(L_0)$$